Damien Gayet - cours de géométrie aléatoire
BTSM Université de Bambey - octobre 2024

Exercices de géométrie aléatoire

Notations et rappel. Dans toute la suite, pour tout ensemble M et toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$,

$$Z(f) = \{f = 0\}$$

et, quand M est un espace topologique, $b_0(f)$ désigne le nombre de composantes connexes de $Z(f)$. On rappelle que pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, une variable aléatoire X réelle suit la loi $N(m, \sigma)$ ssi

$$\mathbb{P}[X \in [a,b]] = \int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-m)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}}. \tag{1}$$

Exercice 1 (Échauffement gaussien)

1. Vérifer en utilisant les coordonnées polaires que
$$\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{dxdy}{2\pi} = 1.$$
En déduire que
$$\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$
En déduire que la loi gaussienne (1) est bien une loi de probabilité.

2. Dans cette question et la suivante, $X \sim N(0, \sigma)$ avec $\sigma > 0$. Montrer que
$$E(|X|) = \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}.$$

3. Soit $M \geq 1$. Montrer que
$$\mathbb{P}(X > M) \leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} e^{-\frac{M}{2\sigma}}.$$

Exercice 2 (Zéros d'une fonction linéaire aléatoire) Soit

$$p(x) = ax + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi $N(0, 1)$.

1. Quelle est la probabilité que p ait une racine positive ?

2. Montrer que la probabilité que la racine de p, quand elle existe, soit plus grande que $M > 0$ décroît exponentiellement vite avec M.

Exercice 3 (Zéros d'une fonction quadratique aléatoire) Soi $q \in [0, 1]$ et

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c tirés indépendamment suivant la même loi : $a = 1$ avec probabilité q, et $a = -1$ avec probabilité $1 - q$.

1. Quelle est la probabilité que $Z(p)$ soit vide ? que $\#Z(p) = 2$? que $\#Z(p) = 1$?

2. Calculer la moyenne de $\#Z(p)$.

3. Vérifier vos résultats en faisant $q = 1$ et $q = 0$.

Exercice 4 (Intersection aléatoire de droites)
Soit $p(x) = ax + b$ avec $a, b \sim N(0, 1)$ indépendants et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Quelles sont les lois de $p(x)$ et $p'(x)$? Quelle vaut la covariance $cov(p(x), p'(x))$?

2. Utiliser la formule de Kac-Rice pour calculer $\mathbb{E}(b_0(Z(p) \cap I)$.

3. Calculer la covariance $e(x, y)$ de p. Retrouver la question précédente en utilisant directement la formule de Kostlan.

4. Vérifier votre formule pour $I = R$.

Exercice 5 (Coniques aléatoires) Soit

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 - 1$$

avec a, b indépendants suivant la loi normale $N(0, 1)$ standard.

1. Dessiner $Z(p)$ pour $(a, b) = (1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$.

2. Donner la loi de $b_0(p)$ (c'est-à-dire trouver $\mathbb{P}[b_0(p) = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Calculer la moyenne de b_0.

Exercice 6 (Racines de polynômes aléatoires) Soit

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i \sqrt{\binom{d}{i}} x^i.$$

1. Calculer la covariance $e(x, y) = \mathbb{E}(p(x)p(y))$ de e.

2. Soit $I \subset \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Kostlan, en déduire que

$$\mathbb{E}(\#Z(p) \cap I) = \frac{\sqrt{d}}{\pi} \int_I \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

   Montrer que si $I = \mathbb{R}$, on retrouve le théorème de Schub-Smale.

Exercice 7 (Zéros polynômes trigonométriques aléatoires) Soit $d \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = a_0 + \sqrt{2} \sum_{k=0}^{d} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où les $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ sont tous indépendants et suivent $N(0, 1)$.

1. Montrer que la covariance vérifie

$$e(x, y) = \frac{\sin((d + \frac{1}{2})(x - y))}{\sin(\frac{1}{2}(x - y))}.$$

2. En déduire, en utilisant la formule de Kostlan, le nombre moyen de zéros de f sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 8 (Points critiques) Dans cet exercice on admet la formule de Kac-Rice de dimension supérieure suivante : si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est presque sûrement C^1, telle que pour tout x,

$$\Sigma := (\mathbb{E}((F_i(x), F_j(x)))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est définie positive, pour tout $U \subset \mathbb{R}^n$ mesurable,

$$\mathbb{E}(\# Z(F) \cap U) = \int_{x \in U} \mathbb{E}(|\det dF(x)||F(x) = 0)\varphi_{F(x)}(0)dx,$$

où $\varphi_{F(x)}(0) = ((2\pi)^n \det \Sigma)^{-1/2}$.

1. Montrer que pour $n = 1$ on retrouve la formule donnée en cours.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction p.s. C^2. Appliquer la question précédente pour donner une formule du nombre moyen de points critiques de f dans U. Vérifier que pour une fonction aléatoire affine, on obtient 0.

Exercice 9 (Une borne du nombre moyen de domaines nodaux) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction aléatoire telle que presque sûrement, f est C^2 et telle qu'il existe une fonction C^2 $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ e(x, y) = \kappa(\|x - y\|^2).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est indépendante de $d^2 f(x)$.
2. (Champ de Bargmann-Fock) Soit

$$f = \sum_{i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1 \cdots i_n} \frac{x_1^{i_1}, \cdots, x_n^{i_n}}{\sqrt{i_1! \cdots i_n!}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$$

   avec les $a_{i_1 \cdots i_n}$ tous indépendants et suivant la loi $N(0, 1)$. Montrer que f vérifie l'hypothèse de l'exercice.
3. Les domaines nodaux (resp. positifs) sont les composantes connexes de $\{f = 0\}$ (resp. $\{f > 0\}$). Supposons que f s'annule transversalement sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que si f s'annule en x, alors $df(x)$ (ou $\nabla f(x)$) ne s'annule pas. Montrer que pour tout domaine nodal positif il existe un maximum local de f.
4. Avec la formule de Kac-Rice donnée par l'exercice 8 pour $F = \nabla f$, exprimer le nombre moyen de points critiques de f sous forme d'une intégrale de densité sur $\mathbb{R}^n$.
5. Pour $R > 0$, on note $N(R)$ le nombre de points critiques de f dans $B(0, R)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$\frac{1}{R^n}\mathbb{E}(N(R)) \to_{R \to \infty} \beta.$$

6. Calculer cette limite dans le cas de Bargmann-Fock.
7. Soit $b_0(R)$ le nombre de composantes connexes de $Z(f)$ dans $B(0, R)$ qui ne touchent pas la sphère $\partial B(0, R)$. Montrer que

$$\limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^n}\mathbb{E}(b_0(R))$$

   est finie.

Remarque culturelle : Un théorème de Nazarov et Sodin démontre qu'en fait cette limsup est une limite, et est strictement positive.